Esami di maturità

Relativamente facile il brano di Luciano di Samosata dal dialogo «Menippo o Negromanzia»
Calcoli complessi per i problemi di geometria analitica
La prossima settimana cominciano i «colloqui» orali

Le soluzioni dei compiti

ROMA. Molti studenti hanno tirato un sospiro di sollievo Le prove della seconda giornata degli esami di maturità non si sono mostrate tutto sommato eccessivamente difficili I problemi di matematica per il liceo scientifico presentano (salvo il terzo, solo in apparenza il più difficile) qualche complessità di calcolo ma non sono insormontabili Relativamente semplici anche quelli delle magistrali, mentre la versione dal greco per il liceo classico – «Un corteo di maschere guidato dalla Fortuna», di Luciano, oratore e polemista di Samosata, tratto dal paragrafo 16 del dialogo *Menippo o Negromanzia* – è giudicata dagli esperti «non difficile» a differenza di quella di Platone di tre anni fa È la terza volta in questo secolo che viene utilizzato un brano di Luciano per la maturità la prima volta fu nel 1932 la seconda nel 1970 In ambedue i casi, si trattava di testi più brevi ma decisamente più difficili di quello attuale E anche questa volta – fa notare il prof Giovanni Sega, docente al «Virgilio» di Roma – il ministero «come quasi ogni anno ha modificato il testo originale in un punto dove non sarebbe stato necessario (i verbi sono stati riportati al presente anziché al passato)» Un operazione, insomma, scorretta «La comprensione del testo – aggiunge – sarebbe stata aiutata da qualche virgola in più, mentre qualche difficoltà può essere stata creata per la presenza «di termini come *pompeutés* che nel dizionario Rocci è indicato con un solo significato non adatto in questo contesto» Smentita intanto la voce – ripresa ieri da alcuni giornali – di una possibile precettazione a Roma di presidenti e commissari d'esame «renitenti» Nella capitale le rinunce – secondo i dati forniti dal provveditorato – riguardano il 31% dei commissari e il 16% dei presidenti A mancare ancora «sarebbero comunque solo alcuni docenti di elettronica e tecnologie elettroniche che il provveditore di Roma ha chiesto di poter sostituire con gli insegnanti dele stesse scuole sede di esame La prossima settimana quindi dovrebbero cominciare regolarmente dappertutto gli orali ai quali parteciperanno anche tre candidati particolari detenuti nel carcere di Porto Azzurro Lorenzo Bozano il «biondino della spider rossa» condannato a 30 anni per il rapimento e l uccisione di Milena Sutter Beppe Piden che sconta 30 anni per rapina a mano armata e Daniele Tozzola carcerato per reati contro il patrimonio I tre hanno sostenuto in questi giorni usufruendo dei permessi previsti dalla legge Gozzini, le due prove scritte presso il liceo scientifico «Foresi» di Portoferraio «Abbiamo avuto questo permesso per gli esami – assicurano i tre carcerati, che sono anche redattori del giornale di Porto Azzurro *La grande promessa* – e nentreremo allora stabilita Sbaglia chi non rispetta la legge Gozzini che è un bene per tutti i detenuti»

Matematica. Scientifico

Il candidato svolga, a scelta due dei seguenti quesiti

1) Data una semicirconferenza di diametro AC = 2 r e centro 0, tracciare la semiretta uscente da A perpendicolare ad AC e giacente rispetto ad AC dalla stessa parte della semicirconferenza

Detto M un punto generico su tale semiretta, indicare con x la distanza di M da A Da M staccare l ulteriore tangente in B alla semicirconferenza Detta K l intersezione della semicirconferenza con il segmento OM determinare l area y del quadrilatero ACBK in funzione di x

Determinare il valore di y per x tendente a + ∞

2) Determinare il luogo dei centri delle circonferenze tangenti alla retta y = 37/12 e passati per A(0,19/12) ed il luogo dei centri delle circonferenze tangenti alla circonferenza di equazione

$$x^2 + y^2 + 4x + 4y - 8 = 0$$

e passanti per B(2 2)

Calcolare quindi l area della parte di piano racchiusa dalle due curve

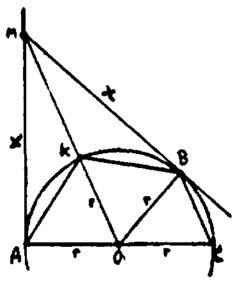
3) Tracciare il grafico della funzione y = x e^{-x}

La funzione data rappresenti per x ≥ 0 la legge oraria del moto di un punto che si muove lungo una semiretta (x rappresenti il tempo e y la distanza del punto P dall origine della semiretta su cui si muove)

Determinare in quale istante P raggiunge la massima velocità in quale istante la velocità è nulla ed in quale istante l accelerazione è nulla

1. Il quadrilatero AOBM è formato da due triangoli simmetricamente congruenti e la sua area è perciò.

$\mathcal{A}(AOBM) = rx$



Esso ha però le diagonali perpendicolari e perciò:

$\mathcal{A}(AOBM) = (\overline{MO} \cdot \overline{AB})/2$.

Tenendo conto che $\overline{MO} = \sqrt{x^2+r^2}$ si ottiene.

$\overline{AB} = \dfrac{2rx}{\sqrt{x^2+r^2}}$

Anche AOBK ha due diagonali perpendicolari e perciò.

$\mathcal{A}(AOBK) = \dfrac{\overline{AB} \cdot \overline{KO}}{2} = \dfrac{r^2x}{\sqrt{x^2+r^2}}$

Per risolvere il problema rimane da determinare l'area di OCB.

Ma BC è il cateto di un triangolo rettangolo, per cui:

$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2} = \dfrac{2r^2}{\sqrt{x^2+r^2}}$

D'altra parte, poiché $\overline{AC} \cdot \overline{BH} = \overline{AB} \cdot \overline{BC}$, si ha

$\overline{BH} = \dfrac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{2r} = \dfrac{2r^2x}{x^2+r^2}$

Si ha perciò.

$\mathcal{A}(OCB) = \dfrac{\overline{OC} \cdot \overline{BH}}{2} = \dfrac{r^3x}{x^2+r^2}$

Si ha quindi:

$\mathcal{A}(ACBK) = \mathcal{A}(AOBK) + \mathcal{A}(OCB) = \dfrac{r^2x\sqrt{x^2+r^2} + r^3x}{x^2+r^2}$

Si ottiene poi (applicando eventualmente il teorema di de l'Hôpital).

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{r^2x\sqrt{x^2+r^2}+r^3x}{x^2+r^2} = r^2$$

2. L'equazione generica di una circonferenta di centro (α, β) è.

$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+c=0$

- Deve passare per $A(0;\frac{19}{12})$, per cui sostituendo si deve avere.

$\left(\frac{19}{12}\right)^2 - 2\beta\left(\frac{19}{12}\right)+c=0 \Rightarrow c = \frac{19}{6}\beta - \left(\frac{19}{12}\right)^2$ (*)

- Deve essere tangente alla retta y = 37/12 per cui l'equazione

$x^2+\left(\frac{37}{12}\right)^2-2\alpha x-2\beta\frac{37}{12}+c=0$ deve avere due soluzioni reali coincidenti. Ne segue

$\Delta = \alpha^2 - \left(\left(\frac{37}{12}\right)^2 - \frac{37}{6}\beta + c\right) = 0 \Rightarrow c = \alpha^2 + \frac{37}{6}\beta - \left(\frac{37}{12}\right)^2$ (**)

Confrontando (*) con (**) si ottiene, semplificando $\beta = -\frac{\alpha^2}{3}+\frac{7}{3}$

Scrivendo in x ed y tale equazione si ottiene il primo luogo cercato la parabola $y = -\frac{x^2}{3}+\frac{7}{3}$ con vertice in V(0, 7/3) e concavità rivolta verso il basso.

Le circonferenze che generano (con i loro centri) il secondo luogo devono passare per B(2,2) e quindi per esse

$4+4-4\alpha-4\beta+c=0 \Rightarrow c = 4\alpha+4\beta-8$

Impostato il sistema formato dalle equazioni delle due circonferenze

$$\begin{cases} x^2+y^2+4x+4y-8=0 \\ x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+(4\alpha+4\beta-8)=0 \end{cases}$$

La sottrazione membro a membro delle due equazioni dà l'equazione dell'asse radicale r dei due cerchi. $(4+2\alpha)x+(4+2\beta)y-(4\alpha+4\beta)=0$

Tale retta, per essere tangente alla circonferenza data (di raggio 4) deve distare 4 dal suo centro C(-2,-2). Deve perciò essere

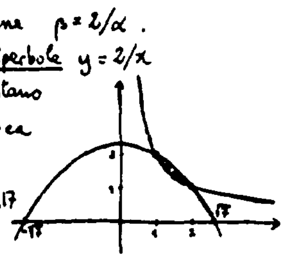
$$d(r,C) = \left|\frac{(4+2\alpha)(-2)+(4+2\beta)(-2)-4\alpha-4\beta}{\sqrt{(4+2\alpha)^2+(4+2\beta)^2}}\right| = 4$$

da cui, dopo vari calcoli, "macicamente" si ottiene $\beta = 2/\alpha$.

Scrivendo in x ed y tale equazione si ottiene l'iperbole y = 2/x

Tenuto conto che la parabola e l'iperbole delimitano una regione finita nell'intervallo [1, 2], l'area richiesta è

$$\int_1^2\left(-\frac{x^2}{3}+\frac{7}{3}-\frac{2}{x}\right)dx = \left|-\frac{x^3}{9}+\frac{7}{3}x-2\ln x\right|_1^2 = \frac{14}{9}-2\ln 2 \simeq 0.17$$



3. La funzione $y = x e^{-x}$ è definita in tutto $\mathbb{R}$, interseca gli assi soltanto nell'origine ed ha.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{e^x} = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

Per determinare i punti stazionari calcoliamone la derivata

$D\left[\dfrac{x}{e^x}\right] = \dfrac{1-x}{e^x}$

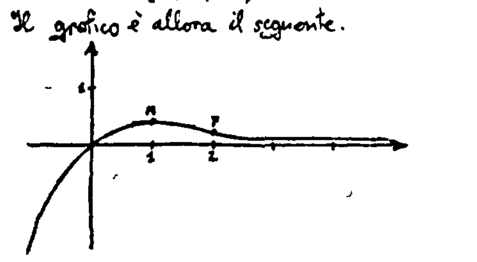
la derivata prima è nulla solo per x=1. La funzione ha un massimo relativo in M(1; 1/e).

Per determinare i punti di flesso calcoliamo la derivata seconda.

$D\left[\dfrac{1-x}{e^x}\right] = \dfrac{x-2}{e^x}$

la derivata seconda è nulla solo per x=2. La funzione ha un flesso in F(2, 2/e²)

Il grafico è allora il seguente.



Per x≥0, il valore massimo della velocità (rappresentata dalla derivata) si ha per x=0, in cui dy/dx = 1.

La velocità è invece nulla (come abbiamo già visto) per x=1 e l'accelerazione (derivata seconda) è nulla per x=2.

Matematica. Magistrali

A) È assegnato il tetraedro regolare di vertici A B C D e di spigolo lungo s

1 Calcolare il suo volume

2 Dopo aver dato sufficiente spiegazione della costruzione geometrica del piano α condotto per il punto D perpendicolarmente alla retta dello spigolo AB calcolare l area della sezione S di α con il tetraedro e la distanza del punto A dal piano α

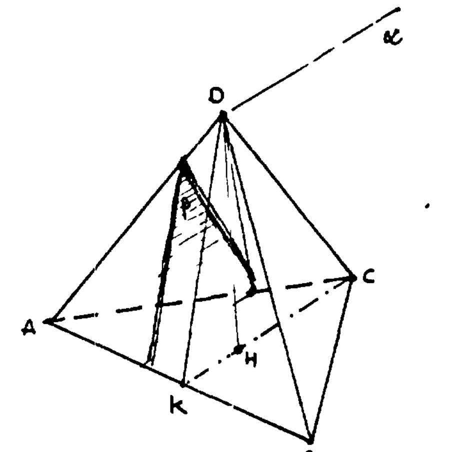
3 Indicato con E il punto dello spigolo AC che a partire da A lo divide internamente in parti direttamente proporzionali ai numeri 2 e 3 condurre per E il piano β parallelo ad α e indicata con S" la sezione di β con l tetraedro calcolare il volume della piramide avente come vertice A e come base S

4 Chiamati X Y Z T i punti medi rispettivamente degli spigoli AC BC BD AD dimostrare che la figura XYZT è un parallelogrammo

5 (Facoltativo) Dimostrare che il parallelogrammo XYZT è un quadrato

B) Dimostrare perché nel sistema di numerazione decimale non esiste una frazione che generi un numero decimale periodico con periodo 9

A.



Il problema si riduce al calcolo di relazioni in cui, successivamente, si tiene conto che l'altezza d'ogni faccia è $\frac{\sqrt{3}}{2}s$ e che il parallelismo dei piani fornisce delle proporzioni opportunamente utilizzabili.

B. Poiché da una parte

$\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$

e quindi $\frac{1}{3} \cdot 3 = 1$ ma anche $\frac{1}{3} \cdot 3 = 0.\overline{9}$

si ha $0.\overline{9} = 1$.

Un numero decimale di periodo 9 è dunque uguale all'intero successivo alla sua parte intera.

Greco. Liceo classico

«Un corteo di maschere guidato dalla Fortuna» Mi sembra che la vita degli uomini assomigli a un lungo corteo e che a guidarlo e a disporre tutto sia la Fortuna assegnando a chi sfila le parti diverse e mutevoli Preso uno a caso lo riveste da re imponendogli una tiara mettendogli al fianco le guardie del corpo e cingendogli la testa con il diadema, a un altro, invece, conferisce la parte di servo Dispone che uno sia bello, un altro lo rende deforme e ridicolo, perché lo spettacolo penso, sia il più vario possibile Spesso poi, anche a metà del corteo, cambia le parti di alcuni, non permettendo che concludano la sfilata nel ruolo assegnato, così, mutando la veste a Creso, lo costringe a indossare quella di un servo domestico addirittura di uno schiavo di guerra, Meandrio, invece che fino a quel momento sfilava tra i servi lo riveste del potere assoluto di Policrate e gli permette di ricoprirne il ruolo per un certo tempo Quando poi il tempo della processione è trascorso, allora ciascuno restituisce la veste, si spoglia, insieme con il corpo, della maschera e diventa quello che era prima, in nulla diverso dal vicino

Δοκεῖ μοι ὁ τῶν ἀνθρώπων βίος πομπῇ τινι μακρᾷ προσεοικέναι, χορηγεῖν δὲ καὶ διατάττειν ἕκαστα ἡ Τύχη, διάφορα καὶ ποικίλα τοῖς πομπευταῖς τὰ σχήματα προσάπτουσα· τὸν μὲν γὰρ λαβοῦσα, εἰ τύχοι, βασιλικῶς διεσκεύασε τιάραν τε ἐπιθεῖσα καὶ δορυφόρους παραδοῦσα καὶ τὴν κεφαλὴν στέψασα τῷ διαδήματι, τῷ δὲ οἰκέτου σχῆμα περιέθηκε, τὸν δέ τινα καλὸν εἶναι ἐκόσμησε, τὸν δὲ ἄμορφον καὶ γελοῖον παρεσκεύασε· παντοδαπὴν γάρ, οἶμαι, δεῖ γενέσθαι τὴν θέαν. Πολλάκις δὲ καὶ διὰ μέσης τῆς πομπῆς μετέβαλε τὰ ἐνίων σχήματα οὐκ

Gli esercizi di matematica sono stati risolti da **WALTER MARASCHINI**
La versione del greco è di **GIOVANNI SEGA**