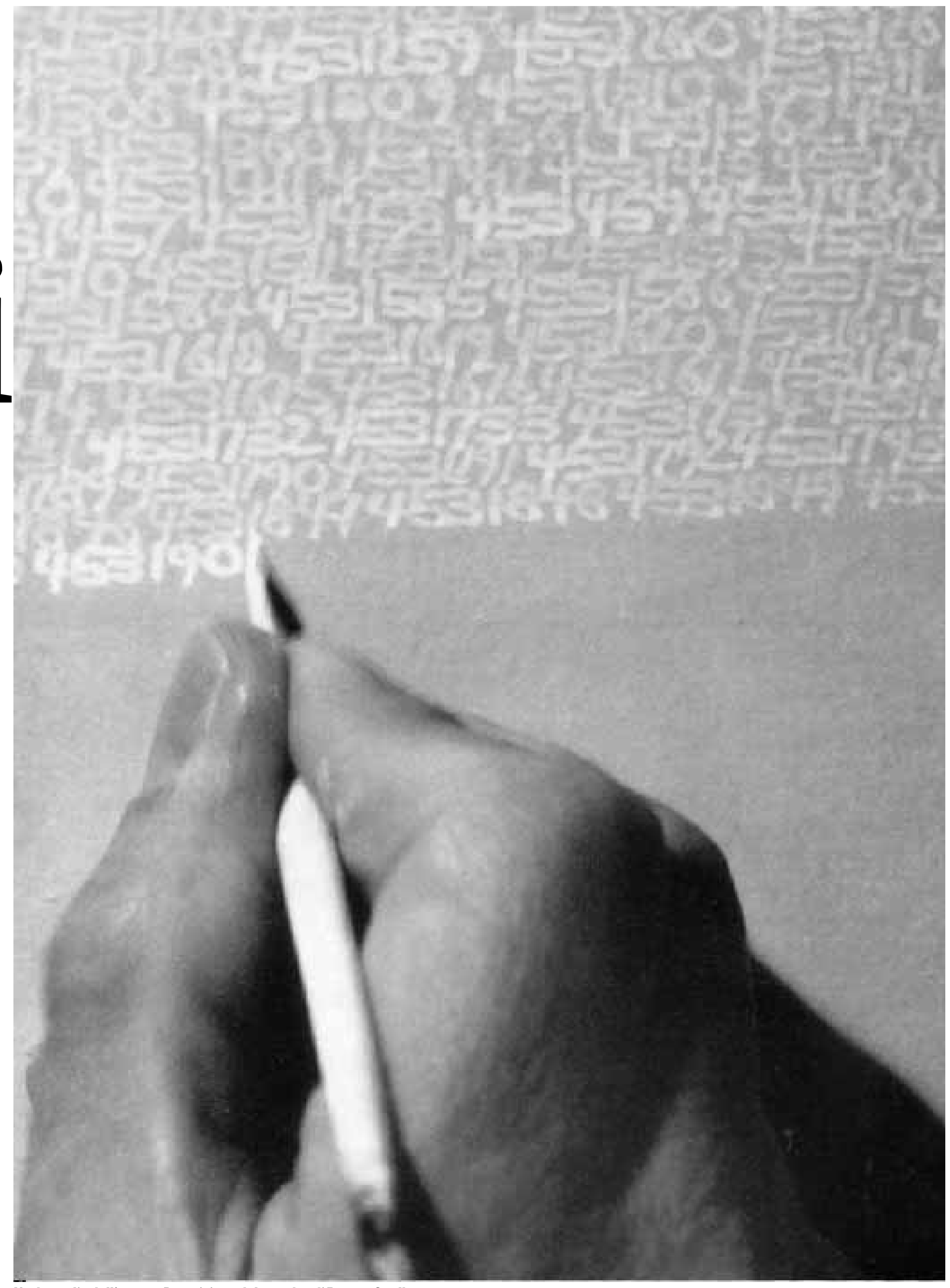
04CUL02A0403 04CUL01A0403 FLOWPAGE ZALLCALL 12 21:24:17 03/03/97

Problemi irrisolti e misteri della matematica: dal paradosso di Achille e la tartaruga al teorema di Fermat

i Numeri impossibili



Un dettaglio dell'opera «Descrizione del mondo» di Roman Opalka

Alcuni problemi di matematica non possono nemmeno essere descritti a chi non è matematico. Altri, invece, sono molto semplici da enunciare, ma attendono da centinaia di anni di essere risolti. Altri ancora hanno trovato risposta solo negli ultimi vent'anni. Si tratta spesso di problemi che nascondono anche una natura filosofica, come il paradosso di Zenone di Elea sull'infinito. Un quesito che risale al V secolo a.C.

MICHELE EMMER

«L'amore, in verità, agisce come i matematici, che mostrano ai bimbi ingenui figure tangibili delle forme pure...

Così scrive Thomas Mann, in *La morte a Venezia*. Invece, nel dialogo *Menone* di Platone, Socrate discute con il servo di Menone. Traccia sulla sabbia un quadrato di lato 1 e vuole determinare la lunghezza della diagonale, che per il ben noto teorema di Pitagora, è eguale alla radice quadrata di 1+1, cioè di 2. Quale è il problema? Il numero radice quadrata di 2 non è razionale, non può essere espresso come quoziente di due numeri interi: è un numero irrazionale.

Quale è la natura dei numeri che conosciamo? Da sempre l'umanità ha cercato di descrivere con quantità numeriche il mondo fisico, è importante sapere in quale spazio numerico viviamo.Ma non possiamo fare a meno dei numeri irrazionali.

Perché non possiamo? La matematica greca aveva grandi meriti ma anche grandi limiti. Uno di questi era proprio la incapacità dei matematici greci di cogliere il significato di numero irrazionale. Il che significava basare la matematica sulla geometria e non sull'algebra e sull'aritmetica. Il problema è che se si prendono punti di una retta e si attribuisce ad ognuno di loro un numero, si scopre che i numeri razionali sono molto «pochi», nel senso che eliminandoli dalla retta e lasciando solo quelli irrazionali, praticamente si è buttato via quasi nulla. Si potrebbe dire che i numeri razionali sono trascurabili rispetto agli altri non razionali.

Chiunque usa un computer sa (o forse no) che il computer conosce solo i numeri razionali, quelli che utilizzavano i greci cioè. Se per esempio si chiede ad un computer ultra potente di calcolare il numero π (il famoso 3,14), scriverà milioni di cifre, ma comunque ad un certo punto si fermerà, non ci darà mai il *vero* valore di π (un numero irrazionale con un numero di cifre che non finisce mai, e senza alcuna struttura che si ripete). Lo stesso vale per il numero radice quadrata di 2.

Insomma quasi tutti i numeri sono del tipo πe radice di 2. Ma allora perché dobbiamo credere ai computer? Si tratta prima di tutto di capire i rapporti tra i diversi tipi di numeri. È solo nel 1761 che Heinrich Lambert dimostra che π è un numero irrazionale, centinaia di anni dopo Platone.

Ma quanti sono i numeri? Galileo Galilei nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (a cura di E. Giusti, Einaudi, 1990) faceva dire a Salviati che i numeri che sono il quadrato di un altro numero sono tanti quanti i numeri (interi) di base, perché per ogni numero vi è il quadrato. Ma i quadrati sono 1, 4, 9...; è chiaro che sono «meno» di tutti i numeri interi positivi 1, 2, 3, 4... Pur tuttavia sono infiniti anche loro; ma sono più infiniti degli altri o meno?

Osserva Simplicio che «questo darsi un infinito maggiore dell'infinito mi par concetto da non poter essere capito in verun modo». Risponde Salviati: «Queste son di quelle difficoltà che derivano dal discorrere che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno agli infiniti». Il problema dell'infinito. Aristotele riportava alcuni paradossi che sono filosoficamente ineccepibili, tipo quello di Achille e la tartaruga. Sono attribuiti a Zenone, vissuto a Elea nell'Italia meridionale, nel V secolo avanti Cristo. Il paradosso afferma che «l'oggetto che si muove più lentamente non può essere superato da quello che si muove più velocemente perché l'inseguitore deve arrivare al punto da cui è partito l'inseguito, cosicché il più lento è necessariamente sempre davanti».

Il problema dal punto di vista matematico è: come è possibile sommare un numero infinito di intervalli di spazio via via decrescenti e ottenere un risultato finito, dato che non vi è dubbio che Achille supera la tartaruga.?Le serie e la teoria dei limiti risolveranno il problema dal punto di vista del calcolo; sarà Gregorio da San Vincenzo a farlo nel 1647, anche se ancora nel '700 non era chiaro quando si potesse calcolare la somma di una serie.

Problemi che hanno richiesto secoli per essere risolti. Problemi anche filosofici, in qualche misura, che potrebbero far confondere sulla reale natura della matematica, perché «la matematica ha questa caratteristica: di non essere capita dai non matematici», diceva André Weil.

Agli inizi del Novecento, in occasione del congresso mondiale di matematica, il grande matematico David Hilbert pose ai matematici di tutto il mondo una serie di problemi, precisamente 23, che hanno di molto determinato il cammino della matematica in questo secolo. Nel 1974 la American Mathematical Society organizzò un convegno dedicato agli sviluppi matematici nati dai problemi posti da Hilbert (*Mathematical developments arising from Hilbert problems*, in «Proceedings of Symposia in Pure Mathematics», vol. 28, 1976). Nel volume veniva anche fatto il punto sui maggiori problemi non risolti della matematica contemporanea. Uno dei primi problemi di cui parlò Hilbert fu il famoso «Ultimo teorema di Fermat», che afferma che per n maggiore di 2 non esistono soluzioni all'equazione $x^n+y^n=z^n$. Scriveva Fermat, in una nota a margine di un libro del matematico greco Diofanto: «Ho scoperto una dimostrazione veramente meravigliosa di ciò, ma il margine non è abbastanza largo per contenerla».

La dimostrazione di Fermat non venne mai trovata e ci sono voluti 350 anni per provare il teorema. Il 23 giugno 1993 Andrew Wiles ha annunciato la dimostrazione. Ci sono voluti alcuni mesi perché la dimostrazione venisse verificata, ma ora è accettata (si veda il fascicolo del 1994 della serie *What's happening in the Mathematical Science*, «Cosa sta succedendo nella Matematica», pubblicato dalla American Mathematical Society ogni anno).

Altri grandi problemi sono stati risolti negli ultimi venti anni: la geometria che formano bolle e lamine di sapone, ovvero, come si chiamano in matematica, le superfici minime. Problema posto dal fisico belga Plateau nel 1870 e che ha richiesto 100 anni per essere risolto dalla matematica Jean Taylor. Un altro famoso problema, noto come problema di Plateau, consiste nell'assegnare un contorno e cercare la superficie di area minima che vi si attacca (tipico per «vedere» alcune soluzioni è costruire il modellino in ferro del contorno ed immergerlo nell'acqua saponata: ritirando fuori il fil di ferro si ottiene la soluzione tramite l'acqua saponata). Lo risolsero agli inizi degli anni Sessanta, nel caso più generale, il matematico italiano Ennio De Giorgi, scomparso lo scorso ottobre, e il matematico americano Reifenberg.

Interessante il caso della dimostrazione del problema dei quattro colori. Il problema consiste nel dimostrare che qualsiasi suddivisione di una superficie (si può pensare ad un grande mappamondo, per esempio) può essere colorata con solo quattro colori con la regola che due paesi vicini con la stessa frontiera non devono avere lo stesso colore. Il problema fu posto nel 1852 e dimostrato nel 1976 da Kenneth Appel e Wolfang Haken. Venne usato il computer che analizzò tutti i casi possibili, un numero enorme, ma calcolabile per un computer di allora, perché i due matematici erano riusciti a ridurre il numero dei casi possibili. Una dimostrazione che esiste solo come calcolo del computer. Gli stessi autori precisarono in anni successivi che tale fatto non modificava per nulla l'idea di dimostrazione matematica.

La storia della dimostrazione è raccontata da Philip Davis e Reuben Hersch nel libro *The Mathematical Experience* (Birkhäuser, 1981) in un capitolo intitolato «Perché dobbiamo credere ad un computer?». Gà perché, dato che usa solo i numeri razionali? Perché i razionali sono sì pochi ma *vicino a loro* si trova sempre uno degli irrazionali e quindi possiamo, con le dovute cautele, credere alle approssimazioni numeriche di un computer. Nel 2000, proclamato dall'Unesco anno mondiale della matematica, saranno proposti ai matematici tanti problemi per il nuovo secolo e millennio. Non chiedete a che cosa servono i problemi di matematica. La matematica ha un'altra caratteristica: una *insensata utilità* nel farci capire il mondo. Molti problemi non possono essere descritti a chi matematico non è. Ma alcuni problemi sono molto semplici da enunciare, pur se attendono da centinaia di anni di essere risolti.

1999: in Italia si svolgeranno le olimpiadi mondiali della fisica

Dove si misureranno per l'ultima volta in questo secolo gli studenti di fisica più bravi del mondo, la crème de la crème planetaria? In Italia, si, proprio qui da noi. Si terranno infatti nel nostro paese le ultime olimpiadi mondiali della fisica che precederanno il 2000: quelle programmate, cioè, per il 1999 (ma per farle, mancano ancora 350 milioni di finanziamenti). Queste olimpiadi - che prevedono gare fatte di problemi e calcoli - sono biennali. Le prossime, nel luglio 1997, si terranno in Canada e vedranno la partecipazione anche di allievi italiani. I ragazzi che rappresenteranno il nostro paese saranno i primi classificati della fase finale delle olimpiadi nazionali che si terrà a Senigallia il 10 e 12 aprile prossimo.

A questa fase finale parteciperanno ben 70 «atleti», settanta tra i migliori studenti di fisica delle scuole medie superiori italiane. L'Italia non è messa male nella classifica mondiale. Finora, su 55 paesi partecipanti, siamo al quindicesimo posto del medagliere. A livello europeo siamo secondi, dopo la Germania e prima della Gran Bretagna.

Insomma, la tradizione dei Fermi, dei Segrè, degli Amaldi sembra in buone mani. Eppure, il futuro potrebbe essere meno allegro. Le preoccupazioni degli insegnanti non mancano, perché negli ultimi anni l'insegnamento della fisica nelle scuole italiane ha visto diminuire le ore di lezione, mentre i laboratori - il cuore di questa disciplina, sono sempre pochissimi.

I CASI

La funzione «zeta» di Riemann

ALBERTO CONTE*

Sempre a proposito dei numeri primi, si è scoperto che i numeri primi vanno diminuendo al crescere delle cifre. Non è nota nessuna formula che consenta il calcolare l'n-esimo numero primo p(n) né si sa come essi distribuiscano all'interno della successione infinita di tutti i numeri interi. All'inizio dell'Ottocento il matematico tedesco Carlo Federico Gauss si accorse che se si indica con f(x) il numero di primi che sono minori di x, la funzione f(x), per x molto grande, è approssimativamente eguale alla funzione x/log x. La dimostrazione venne ottenuta nel 1896, indipendentemente, da Hadamard e da De La Vallée Poussin. Essi si servirono di una funzione introdotta da Bernhard Riemann cinquant'anni prima: la funzione zeta.

Riemann si rese conto che il problema chiave consisteva nel comprendere la natura degli zeri della funzione zeta, cioè delle soluzioni della equazione $\zeta(z) = 0$. Gli zeri reali sono facili da trovare: sono tutti i numeri pari negativi: -2, -4 - 6, e così via. Per quel che riguarda i rimanenti Riemann congetturò che fossero della forma + iz (ove i denota l'unità immaginaria tale che $i^2 = -1$). È questa la famosa *ipotesi di Riemann*, a tutt'oggi non dimostrata. J. van de Lume e Herman de Riele hanno calcolato il primo miliardo e mezzo di zeri della funzione zeta trovando che sono tutti della forma prevista da Riemann. Il che ovviamentenon vuol dire averlo dimostrato.

*Università di Torino

Senza legge la società dei «primi»

CARLO SBORDONE*

I numeri primi sono divisibili solo per se stessi e per l'unità. Ad esempio 2,3,5,11, sono primi mentre 8 non lo è. Euclide dimostrò che ci sono infiniti numeri primi, cioè che ogni numero primo è seguito da un numero primo più grande, ma la loro distribuzione è alquanto irregolare e ciò ne ha aumentato l'interesse, anche al di fuori della matematica. La crittografia, ad esempio, che si occupa della codifica e della decodifica dei messaggi segreti, si basa sistematicamente sulle proprietà dei numeri primi. Nonostante questa irregolarità (per esempio, tra 97 e 109 ci sono ben 5 numeri primi mentre tra 114 e 126 non ve ne sono affatto), matematici si sono impegnati a trovare una qualche legge, un qualche ordine. Nel 1742 Goldbach sollevò un problema che è tuttora insoluto: è vero che ogni numero si può scrivere in modo unico come prodotto di numeri primi (da cui il nome di «atomi» per i numeri primi); ma un numero pari è sempre somma di numeri primi? Finora non è stato trovato alcun numero pari per cu la congettura di Goldbach sia falsa, il che non vuol dire che non sia possibile che essa fallisca per qualche numero incredibilmente grande. Tra i tentativi recenti di risolvere la questione vi è un risultato parziale di Remaré che nel 1991 ha dimostrato che ogni numero pari è somma di al massimo sei numeri primi.

*Università di Napoli