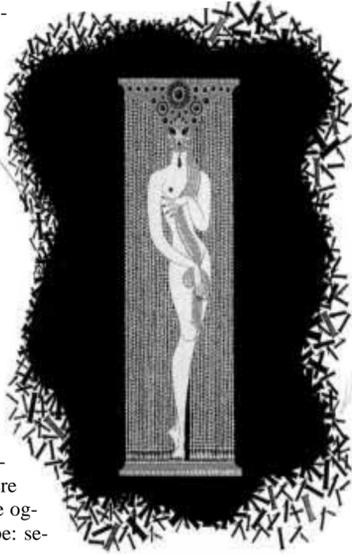




L'uno, materia prima della molteplicità

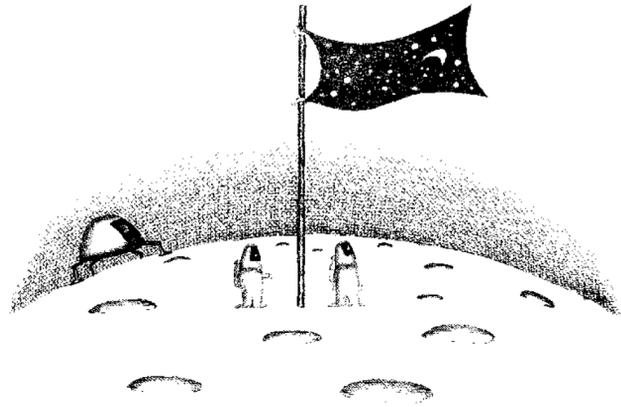
La maggior parte dei sistemi numerici non possiede lo zero; tutti, tranne uno, non possiedono l'infinito, ma nessun sistema ha potuto fare a meno dell'uno. Senza l'uno non esiste il numero; e se c'è universalità nel mondo dei numeri, è proprio nell'uno. Tutto inizia dall'esistenza: un oggetto esiste se esso è ed esso è soltanto se è uno. «L'unità è ciò secondo cui ciascuna delle cose esistenti è detta una» pone Euclide come prima definizione dell'*Aritmetica* dei suoi *Elementi*. Viene poi la pluralità, che si presenta sotto due aspetti. Quando la pluralità non ha limiti, essa è *plethos*, e non è oggetto di uno studio particolare. Quando ha un limite, essa diviene numero, *arithmos*, la cui conoscenza è l'oggetto dell'aritmetica. «Un numero è la moltitudine composta da unità», pone Euclide come seconda definizione. Nella sua iterazione senza fine l'uno designò alcuni numeri particolari — il dieci, il dodici, il cinque, il venti, il sessanta — al fine di farne delle basi, unità di ordine superiore che lo avrebbero aiutato nell'operazione del contare. Per gli antichi greci l'uno non era un numero, ma ciò per cui il numero è. Imprescindibile materia prima della molteplicità, l'uno rimase a lungo isolato, contrapposto frontalmente alla pluralità. In seguito, perse lentamente la sua assoluta singolarità e divenne un numero, il primo.

Nel pensiero greco il concetto di numero "uno" non si era chiaramente formato. uno era l'esistenza, mentre il numero cominciava da "più di uno". Nel 1893 Gottlob Frege ha scritto nelle *Leggi Fondamentali dell'aritmetica*: "L'idea che ciascuno si fa del numero "uno", qualunque essa sia, deve accuratamente essere distinta dal numero "uno", così come le idee della luna devono essere distinte dalla luna vera e propria". Sotto, l'1 disegnato da Erté.



Lo zero, una lunga storia in tre tappe e in tre luoghi

Lo psicologo Jean Piaget scrive: «Finché si è cercato il numero nell'oggetto, il primo numero della serie è stato l'uno. Invece, ritenere che il primo numero della serie sia lo zero significa rinunciare ad astrarre il numero dall'oggetto». Lo zero ha dovuto percorrere una lunga strada per diventare il numero che oggi conosciamo. Ha dovuto superare tre tappe: se-



La forza prodigiosa del continuo

Cantor dimostra che l'infinito numerabile o discreto non è l'unico infinito. La potenza dei numeri reali è maggiore. Non è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra **R** e **N**. Questo vuol dire che su una retta (ricordiamoci che la retta reale corrisponde a **R**) ci sono «infinitamente» più punti che numeri interi per indicarli. Eccoci quindi in presenza di due infiniti; il secondo, quello di **R**, viene chiamato continuo.

Nei suoi *Poemi visibili* (pagina precedente) Max Ernst rappresenta la nozione di biiezione, cioè di corrispondenza biunivoca. Ciascun occhio sinistro fissa l'occhio destro cui corrisponde. Sopra un disegno di Mitra Divshali

Eppure, altra sorpresa, in un qualunque «piccolo» segmento ci sono altrettanti punti che in tutta la retta, e non di meno come si ci aspetterebbe! Per questo Cantor parla della «forza prodigiosa del continuo».

Si pone inevitabilmente una domanda. Si può andare al di là del continuo? Ci sono altri infiniti oltre al discreto e al continuo? Secondo Cantor sì. Egli dimostra che l'insieme $P(A)$ di tutte le parti di un insieme A ha una potenza superiore ad A , ovvero un insieme ha sempre più parti che elementi. Per l'esattezza, un insieme che conta n elementi, conta 2^n parti. Per esempio l'insieme $A = \{a, b, c\}$, che ha tre elementi, ha $8 = 2^3$ parti: $\{a, b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}$ e l'insieme



Per prevenire le obiezioni e sostenere l'affermazione di Democrito, il poeta latino Lucrezio verso sono infiniti». Clazomeno, Epicuro e soprattutto l'atomista Democrito, secondo cui «Gli atomi che costituiscono l'universo sono infiniti». Nella Grecia antica alcuni pensatori elaborarono delle concezioni più ardite intorno all'infinito. Basti citare Anassagora di Clazomeno, Epicuro e soprattutto l'atomista Democrito, secondo cui «Gli atomi che costituiscono l'universo sono infiniti».

Un numero illimitato di mondi infiniti

Lo zero, un niente che può tutto! La comparsa di questa strana cifra nelle tecniche di calcolo creò una serie di difficili problemi. Lo zero è pari o dispari? Se si vuole salvaguardare la conservazione della parità (la somma di due parti è pari) lo zero sarà pari. In un manuale di aritmetica dedicato ai commercianti, pubblicato nel 1485, si legge: «Le cifre sono dieci figure, delle quali nove hanno un valore e la decima vale a niente, ma fa valore le altre: essa si chiama zero o cifra». Sotto, varie forme dello zero maya: glihi che si ritiene rappresentino delle conchiglie.



Gli infinitamente piccoli sono anch'essi del numero? Sopra, *Limite circolare* un'opera di M.C. Escher. A fronte, *Natura morta con cifra di varia grandezza*.

Come si è passati dall'infinito potenziale, « ∞ », limite verso cui si tende senza mai raggiungere, all'infinito realizzato, il numero X ? Aristotele aveva affermato la non esistenza dell'infinito in atto. Ventitré secoli dopo, due matematici tedeschi, Richard Dedekind e Georg Cantor, stabiliscono la sua esistenza. Cantor fa molto di più, dimostra che tale infinito non è unico. Esaminiamo l'affermazione principale da

Un infinito che fa numero

D'altra parte la discussione sull'esistenza di un infinito in atto non era del tutto conclusa. L'idea continuava ad avere dei sostenitori. L'argomento principale degli avversari è che, essendo incompiuto, l'infinito non può esistere come oggetto ben definito. Una tale esistenza comporterebbe gravissime contraddizioni! Per esempio, questo infinito in atto, essendo un numero, sarebbe contemporaneamente pari e dispari, divisibile e indivisibile.

Dice Aristotele, con una bella espressione: «L'infinito è dunque il contrario di quel che se ne dice: non ciò al di fuori di cui non c'è niente, ma ciò al di fuori di cui c'è sempre qualcosa di nuovo, quanto alla quantità».

