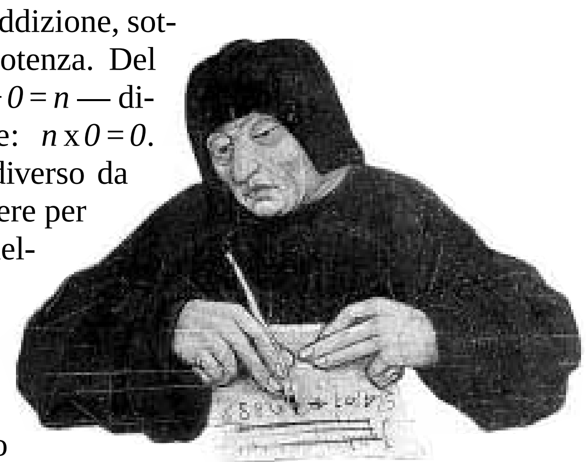
11SPC05A1105 ZALLCALL 11 20:01:03 05/10/97

Lo *zero cifra*. Nei dispositivi concreti che utilizzano le colonne — barre verticali tracciate le une accanto alle altre — e che si fondano sul principio di posizione, un numero è rappresentato da una delle nove cifre poste nelle varie colonne, per significare le quantità di unità, decine, centinaia ecc. che appaiono nella composizione del numero. Nel caso in cui una potenza della base non sia presente, la colonna corrispondente resta vuota. A un certo punto nasce l'idea di rappresentare con un segno grafico anche l'assenza di una cifra. In tal modo le colonne vuote vengono a essere occupate da un segno — lo zero — proprio

come le altre, e questo rende possibile eliminare le barre che separano le colonne. Scomparso il dispositivo materiale, il segno che rappresentava l'assenza di unità, di decine o di centinaia, era diventato una cifra come le altre: la decima unità!

Lo *zero numero*, il numero nullo. Se le cifre da uno a nove sono anche dei numeri, allora anche lo zero lo è? Il numero nullo viene definito come risultato di una sottrazione di un intero qualunque da se stesso: $0 = n - n$.

Da cifra, segno che permette di scrivere i numeri, lo zero è diventato numero, cioè attore delle varie operazioni dell'aritmetica, ed è entrato nel grande gioco del calcolo. Addizione, sottrazione, moltiplicazione, elevamento a potenza. Del tutto impotente nell'addizione — infatti $n + 0 = n$ — diviene onnipotente nella moltiplicazione: $n \times 0 = 0$. Quanto all'elevamento a potenza, se a è diverso da zero, $a^0 = 1$. Ma attenti alla divisione! Dividere per zero è impossibile, è il divieto supremo dell'aritmetica!



Zero babilonese, maya e indiano

Il primo zero della storia fu senza dubbio

Un piccolo cerchio, facile da tracciare, è una cifra ideale. Eppure, per gli studenti lo zero è il numero difficile per eccellenza. Fino a sei anni, il venticinque per cento dei bambini scrive $0+0+0=3$. Fino a otto anni e mezzo, il cinquanta per cento dei bambini scrive $0 \times 4 = 4$. Per i maestri, scritto con rabbia e più volte sottolineato, se non accompagnato da qualche veemente "Nullo!", lo zero è il voto più terribile, la constatazione della mancanza assoluta di speranza.

«numero» di elementi di un insieme. Si pone allora la definizione fondamentale: due insiemi tra cui sussiste una corrispondenza biunivoca sono equivalenti, o meglio «equipotenti». Comincia così l'epopea degli infiniti di Cantor.

Infinito: la parte è uguale al tutto!

Tra il 1870 e il 1880 i lavori di Cantor e Dedekind hanno prodotto una rivoluzione nella matematica. Rovesciando completamente la tradizionale affermazione sulla parte che non può essere «uguale» al tutto, essi la assumono come proprietà fondamentale che definisce lo strano comportamento dell'infinito. Essi stabiliscono: «un insieme è infinito quando è equipotente con una sua parte propria».

Esiste un insieme infinito? Certamente sì. L'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri interi è infinito. Infatti è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra l'insieme $\mathbb{N}$ di tutti i numeri interi e l'insieme P dei numeri interi pari, che è certamente una «parte» propria di $\mathbb{N}$. La corrispondenza è la seguente: a ogni numero intero di $\mathbb{N}$ si fa corrispondere il suo doppio, che è un numero pari, dunque elemento di P. Viceversa, a ogni elemento di P, che è pari, si fa corrispondere la sua metà, che è un intero, dunque un elemento di $\mathbb{N}$.

Ecco l'infinito realizzato, *in atto*. L'insieme dei numeri interi non è più grande di una delle sue parti. Questo infinito svelato viene detto *numerabile*, o *discreto*.

Stabilito questo pilastro centrale, l'edificio di Cantor e Dedekind ha potuto strutturarsi con sbalorditiva semplicità, demolendo qui e là certezze che resistevano tranquille da anni e anni.

Cantor stabilisce per esempio che le frazioni non sono «di più» dei numeri interi. L'insieme *Q* dei razionali è equipotente all'insieme $\mathbb{N}$. Questo significa forse che c'è un unico infinito? O che non si può superare l'infinito numerabile?

Richard Dedekind (1831-1916), illustre ricercatore, spirito aperto e di estremo rigore, fu uno dei pochi matematici di fine Ottocento a non indietreggiare di fronte al trattamento aritmetico dell'infinito. Dedekind fu anzi il complice e l'amico di cui Cantor aveva bisogno. Per ventisette anni, dal 1872 al 1899, i due intrattennero una lunga corrispondenza, un dialogo tra eguali, un meraviglioso scambio di intelligenze. Le loro lettere sono una delle più belle opere della letteratura matematica, esempio quasi unico di un confronto costante tra due ingegni sulla comune passione. L'uno espone all'altro il percorso, e l'altro, con l'acutezza delle sue critiche e con puntigliosa comprensione, lo costringe ad affinare le dimostrazioni, a dare insomma il meglio di sé.

trasforma in un'arma formidabile. Si fanno due mucchi, e io mi siedo tra i due. Ogni mucchio cela la propria «quantità». Metto le mani nei due mucchi, una in un mucchio, una nell'altro. Poi, con lo stesso movimento, con ogni mano prendo un oggetto da ciascun mucchio, e metto i due oggetti uno di fronte all'altro. Ho fatto un «abbinamento». Quindi ricomincio.

Si capisce subito che, quali che siano i mucchi considerati, ho individuato un procedimento che non si può interrompere da solo, una sorta di meccanismo primario. In questo modo posso produrre coppie senza tregua; non c'è nessun limite a questi «abbinamenti». Anzi, l'unico limite è la natura dei mucchi prescelti. Se uno di essi si esaurisce, o se entrambi si esauriscono, il processo si interrompe. Tra tutti i mucchi del mondo, quelli che si esauriscono nello stesso istante, per cui tutte e due le mani si fermano contemporaneamente, hanno certo qualcosa in comune. Si dice che essi hanno la stessa potenza, la stessa quantità di elementi.

Il procedimento descritto definisce una «corrispondenza biunivoca» tra i due insiemi. Cantor e Dedekind lo pongono alla base del loro edificio; essi ritengono che due insiemi tra cui si possa stabilire una simile corrispondenza biunivoca hanno lo stesso «numero» di elementi. In tal mondo si definisce il

"Non voglio dissimulare in alcun modo che con la mia teoria mi contrappongo in una certa misura alle concezioni più diffuse riguardo all'infinito matematico e ai punti di vista adottati di solito sull'essenza delle grandezze numeriche."
Georg Cantor
Fondamenti di una teoria generale degli insiemi (1882)

quello babilonese, apparso prima del III secolo a.C. Gli scribi babilonesi, che rappresentavano le cifre per mezzo di cunei verticali o orizzontali, idearono un segno che si presentava come un doppio cuneo inclinato. Si trattava di una vera e propria cifra zero, segno di separazione nella scrittura dei numeri.

Via via le funzioni del segno zero si sono allargate; in ambiti specifici, come in astronomia, fu utilizzato come zero operatore; oppure venne collocato in posizione iniziale o finale nella scrittura dei numeri, e in particolare delle frazioni sessagesimali. Tuttavia lo zero babilonese non è mai stato pensato come un numero.

Durante il primo millennio d.C., gli astronomi maya misero a punto una efficace numerazione posizionale in base venti, nella quale i numeri erano rappresentati da gruppi di punti e tratti che seguivano una disposizione verticale. Un segno grafico particolare, un ovale orizzontale, che raffigurava il guscio di una lumaca, un glifo, aveva il ruolo di segno separatore e consentiva di scrivere i numeri senza ambiguità. Si trattava di un'invenzione notevole, benché non avesse acquisito nessuna potenza operatoria, né come segno operatore e tanto meno come numero.

Dal vuoto al niente: il passaggio dalla posizione vuota alla quantità nulla

L'invenzione dello zero in tutte le sue funzioni si deve agli indiani, che lo introducono nel calcolo già nel V secolo d.C. Lo zero era indicato con un piccolo cerchio, detto *sunya*, il vuoto. In arabo *sunya* divenne *sifr*, in latino *zephirum*, da cui *zephiro*, zero. In molte lingue, l'ultimo arrivato tra le cifre, il *sifr*, ha dato il suo nome all'intera collezione (cifra).