22SCI03A2206 22SPC06A2206 FLOWPAGE ZALLCALL 12 21:24:05 06/21/97

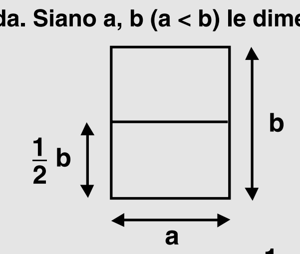
Allora, il matematico in erba che ha risolto tutti i problemi ed ha risposto correttamente a tutte le domande impiegando il minor tempo è... un ragazzo di diciannove anni. Fiato ancora un po' sospeso perché i partecipanti di diciannove sono stati numerosi. Ok. Ora ci siamo. Il suo nome è... Giacomo Tommei. Bravo Giacomo. Non hai strafatto, non ti sei dilungato. non hai sbagliato mai. Non sei arrivato solo alla finalissima. Insieme a te c'erano molti altri partecipanti. E il matematico che ha elaborato i problemi. Paolo Negrini, ci ha detto che se avesse dovuto scegliere il migliore tra i finalisti a quel punto avrebbe dovuto basarsi su elementi di giudizio inammissibili. Perché hai vinto? Per i timbri, naturalmente. I timbri sulle buste che contengono le tue risposte dimostrano che tra i sette della finalissima sei quello che ci ha messo di meno a risolvere i problemi. Il timbro infatti marca la data in cui si è imbucata la lettera con le risposte. L'Electa ti spedirà a casa, all'indirizzo che ci hai fornito, l'intera collana Universale Electa Gallimard. Detto ciò però dobbiamo rampognarti poco poco: perché non ci dici niente di te? Non una parola tranne che sei giovane. Non è che sei già calato nel ruolo del gelido matematico assorto nei suoi astrusi «mumble mumble»? Facci sapere qualcosa (che vuoi fare da grande? La matematica già la sai...) e buona lettura.

Le risposte del 18 maggio

QUESITO 1: L'assioma delle parallele

QUESITO 2: Renato Caccioppoli

QUESITO 3: Prima domanda. Siano a, b (a < b) le dimensioni del foglio (vedi figura).



La richiesta è che valga l'uguaglianza $\dfrac{\frac{1}{2}b}{a} = \dfrac{a}{b}$

Da questa segue subito $b^2 = 2a^2$ e quindi $b = a \times \sqrt{2} = a \times 1{,}414$. Questo è il rapporto che deve sussistere fra i lati del foglio. Per esempio $21 \times \sqrt{2} = 29{,}69848...$; le dimensioni (in cm) di un foglio A4 sono: 21 x 29,7.

Seconda domanda. I rapporti che si desidera siano uguali sono: $\dfrac{\frac{c}{2}}{a} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c}$

Da queste uguaglianze si ricava: $\frac{1}{2} bc = a^2$ e $\frac{1}{2} c^2 = ab$

Da cui, con facili passaggi, segue: $b = a \times \sqrt[3]{2}$, $c = a \times \sqrt[3]{4}$

Le lunghezze degli spigoli debbono quindi formare una *progressione geometrica* di ragione $\sqrt[3]{2}$

QUESITO 4: Si tratta di un problema riguardante una *progressione aritmetica*; eviteremo tuttavia di fare ricorso a formule specifiche, risolvendo il problema con ragionamenti elementari. Indichiamo con a la quota dovuta dal piano terreno; con d la maggiorazione di spesa da un piano a quello immediatamente superiore; così il primo piano dovrà pagare a + d, il secondo a + 2d, ..., il piano n - esimo dovrà pagare a + nd; in particolare il 99° piano dovrà pagare a + 99d. La prescrizione che il 99° piano paghi dodici volte la quota del piano terreno si esprime dunque con: $a + 99d = 12a$

da cui si ricava $a = 9d$

La somma di tutte le quote deve inoltre totalizzare l'intero importo speso. Tale somma è così esprimibile:

$$\begin{array}{ll} \quad a + d & \text{(piano terreno)} \\ + a + 2d & \text{(primo piano)} \\ + a + 3d & \text{(secondo piano)} \\ \ldots \quad \ldots & \\ + a + 99d & \text{(99° piano)} \\ \hline = 100a + d(1 + 2 + 3 + \ldots + 99) & \end{array}$$

Per calcolare il risultato della somma (1 + 2 + 3 +...+ 99) non occorre eseguire 98 addizioni: possiamo ragionare come fece il giovane Carl Friedrich Gauss (1777-1855), grande matematico tedesco, quando frequentava ancora la scuola elementare. Egli ragionò più o meno così:

Il numero che ci interessa è: $S = 1 + 2 + \ldots + 98 + 99$

Ma si può anche scrivere: $S = 99 + 98 + \ldots + 2 + 1$

Cosicché sommando in colonna, $2S = \underbrace{100 + 100 + \ldots + 100 + 100}_{99 \text{ volte}} = 9900$

E quindi $1 + 2 + \ldots + 99 = 9900 \div 2 = 4950$

(Il matematico Gauss è noto ai telespettatori italiani, in quanto è effigiato sulla banconota da 10 DM che spesso appare durante i notiziari economici).

I valori di a e d si ricavano ora dalle relazioni $\begin{cases} a = 9d \\ 100a + 4950d = 194.805.000 \end{cases}$

che forniscono, con facili calcoli $a = 299.700$, $d = 33.300$

la quota dovuta dal 33° piano sarà dunque $a + 33d = 299.700 + 33 \times 33.300 = 1.398.600$ £

Le risposte del 25 maggio

QUESITO 1: Luca Pacioli

QUESITO 2: Enrico Bombieri

QUESITO 3: Immaginiamo di mettere all'opera indipendentemente l'uno dall'altro i tre personaggi, che supporremo instancabili, per 15 ore consecutive. Il primo riuscirà a verniciare 5 cancelli, il secondo 4 e il terzo soltanto 3. In 15 ore essi avranno quindi verniciato 5 + 4 + 3 = 12 cancelli; per verniciarne uno soltanto il tempo necessario sarà $\frac{15}{12}$ h = $\frac{5}{4}$ h cioè 1 h 15'

QUESITO 4: Sia $x = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}}}}$

Elevando al quadrato segue $x^2 = 6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}}}} = 6 + x$

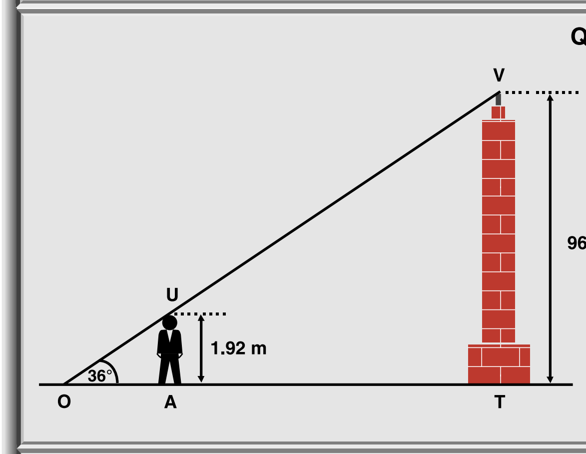
quindi x è soluzione dell'equazione di secondo grado $x^2 - x - 6 = 0$ Le soluzioni di quest'ultima sono -2 e 3. Il numero che ci interessa non può evidentemente essere negativo; quindi x = 3.
(Una discussione completa del problema comporterebbe anche la verifica, non difficile, del fatto che la successione $\sqrt{6}\,;\ \sqrt{6+\sqrt{6}}\,;\ \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}\ \ldots$ è crescente, e che tutti i termini sono minori di 3; ciò assicura che la successione converge ad un limite, il quale, come abbiamo visto, non può che essere 3).

Le risposte dell'1 giugno

QUESITO 1: in duello: i gruppi

QUESITO 2: Ennio De Giorgi

QUESITO 3



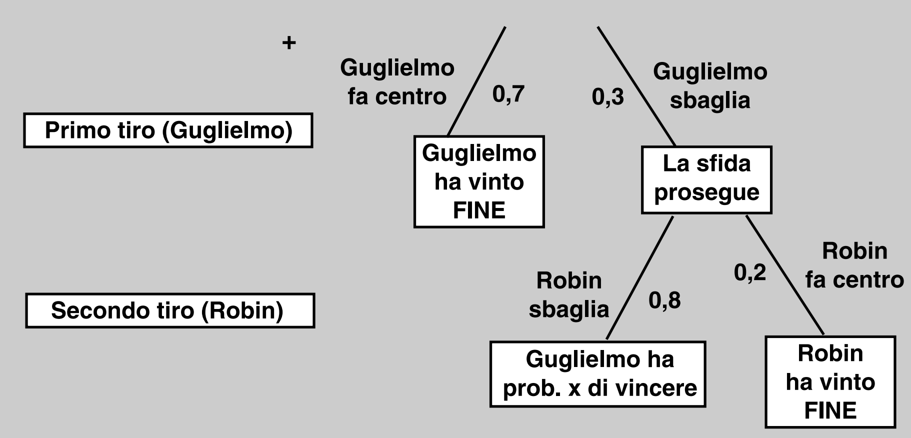
Siano T il punto alla base della torre, V la cima della torre. Oliviero si deve porre in un punto O tale che il triangolo OTV (rettangolo in T) abbia l'angolo in O di 36°. Per una nota regola di trigonometria risulterà:

$$OT = \frac{VT}{\tan(V\hat{O}T)} = \frac{96 \text{ m}}{0{,}727} = 132 \text{ m}$$

Questa è la distanza dalla torre alla quale si deve porre Oliviero. Alberto deve trovarsi in un punto A tale che OA : OT = UA : VT, da cui

$$OA = \frac{OT \times UA}{VT} = \frac{132 \times 1.92}{96} \text{ m} = 2.64 \text{ m}$$

QUESITO 4: La difficoltà del problema consiste nel fatto che la contesa non ha un numero prestabilito di tiri entro i quali verrà individuato il vincitore; i due concorrenti potrebbero sbagliare per un numero imprecisato di volte, prima che uno dei due faccia centro. Il modo più semplice per risolvere il problema senza dover considerare una sequenza infinita di casi possibili è il seguente: indichiamo con x la probabilità oggetto della domanda del problema. Se Guglielmo fa centro al primo tiro (la probabilità che ciò accada è, per ipotesi, 0,7), ha vinto, e la gara termina. Se sbaglia, il turno passa a Robin. Le speranze per Guglielmo sono legate ad un errore di Robin, errore che ha probabilità 0,2 di verificarsi; in tal caso il gioco passerà nuovamente a Guglielmo, il quale si ritroverà esattamente nella situazione dell'inizio della sfida, e tornerà quindi ad avere probabilità x di aggiudicarsi la vittoria finale.



Aiutandosi con il grafico qui sopra, in cui accanto ad ogni linea sono indicate le corrispondenti probabilità, si perviene alla relazione: $x = 0{,}7 + (0{,}3) \cdot (0{,}2) \cdot x$ da cui si ricava $0{,}94\,x = 0{,}7$,

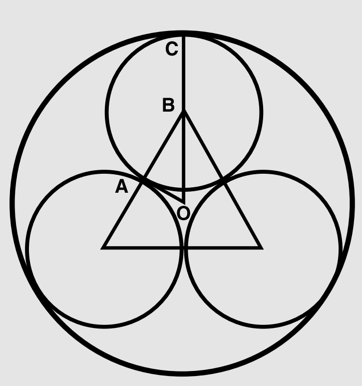
e infine $x = \frac{35}{47} = 0{,}745$

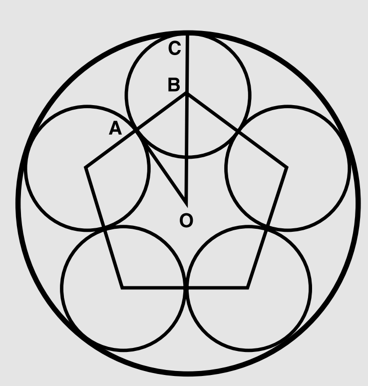
Le risposte dell'8 giugno

QUESITO 1: David Hilbert; 23

QUESITO 2: Andrew Wiles; per ogni intero n > 2 l'equazione $x^n + y^n = z^n$ non ammette soluzioni x, y, z numeri naturali

QUESITO 3: Il ragionamento che conduce alla soluzione è lo stesso nel caso delle tre circonferenze come nel caso generale delle n circonferenze; la prima figura rappresenta il caso n = 3, la seconda n = 5.
Sia r il raggio delle circonferenze "piccole", che si vuole calcolare.





Risulta (il ragionamento vale per entrambe le figure);

$$AB = BC = r \quad ; \quad OB = \frac{AB}{\text{sen}(A\hat{O}B)} = \frac{r}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)} \quad ; \quad 1 = OC = OB + BC = r\left(1 + \frac{1}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right)$$

da cui si ricava $r = \dfrac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) + 1}$ Questa è la risposta alla seconda domanda; per quanto riguarda la prima domanda, è sufficiente porre n = 3: si ricava

$$r = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - 3$$

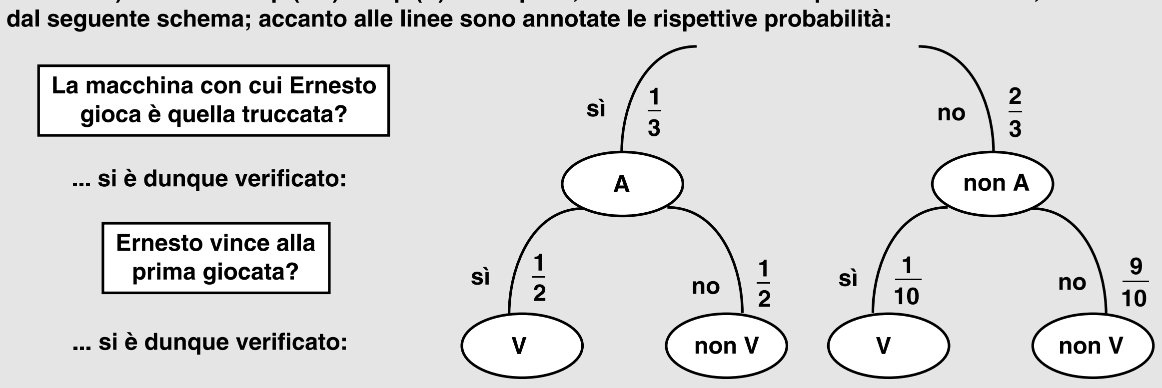
QUESITO 4: Il dato essenziale che dobbiamo calcolare è la probabilità che Ernesto si sia casualmente trovato a giocare sulla macchina da lui precedentemente manomessa. Questa probabilità è $\frac{1}{3}$ quando egli entra nella sala giochi; ma è intuitivo che questa probabilità aumenta sapendo che Ernesto ha vinto al primo tentativo. Detti A e V gli eventi

A: "Ernesto si trova a giocare sulla macchina truccata"

V: "Ernesto vince al primo tentativo"

si tratta di calcolare la *probabilità condizionale* p (A\V), probabilità dell'evento A quando si sappia che sia verificato V. Per la formula della probabilità composta è $p(A \backslash V) = \dfrac{p(AV)}{p(V)}$

(AV indica l'evento congiunto: "Ernesto si trova a giocare sulla macchina truccata *e* vince al primo tentativo"). Il calcolo di p (AV) e di p (V) è semplice, tenendo conto delle possibili alternative, come risulta dal seguente schema; accanto alle linee sono annotate le rispettive probabilità:



Risulta dunque: $p(AV) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$; $p(V) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10} = \frac{7}{30}$ e quindi $p(A \backslash V) = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{30}} = \frac{5}{7}$

La probabilità che Ernesto vinca per la seconda volta si calcola ora esattamente come sopra abbiamo calcolato p (V), sostituendo però nella parte alta dello schema le probabilità "a priori" $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ rispettivamente con $\frac{5}{7}$ e $\frac{2}{7}$. La probabilità dell'evento V_2 "Ernesto vince per la seconda volta" è dunque uguale a: $p(V_2) = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{10} = \frac{27}{70}$ (Gli stessi calcoli e, naturalmente, lo stesso risultato si sarebbero potuti dedurre utilizzando il Teorema di Bayes).