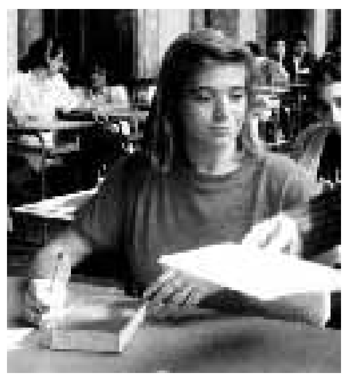


Dalla versione di Seneca ai problemi di matematica e ragioneria

Maturità, ecco le soluzioni delle prove d'esame

Tutte le risposte del secondo compito scritto

Liceo classico

L'uomo è per sua natura assetato di conoscenza
(Seneca, *De otio*, 4, 2; 5, 1 - 4)

Siamo soliti dire che il bene più grande sia vivere secondo natura. La natura ci ha fatto nascere per entrambi questi scopi: per la contemplazione dell'universo e per l'azione. Dimostriamo ora la nostra prima affermazione.

Che dire oltre? Questa tesi non sarà da considerare dimostrata, se ciascuno avrà riflettuto a quale grande desiderio ha di conoscere l'ignoto, a quanto la sua attenzione sia destata da tutte le storie? Alcuni navigano e sopportano le fatiche di una lunghissima peregrinazione con la sola ricompensa di conoscere qualcosa di nascosto e di lontano.

Questa esigenza riunisce le folle per assistere agli spettacoli, spinge a spiare quanto è precluso, a investigare quanto più le cose sono segrete, a rovistare nell'antichità, a prestare attenzione alle usanze delle popolazioni barbare.

La natura ci ha dato un'indole assetata di conoscenza, e, conscia della sua abilità e della sua bellezza, ci ha dato l'esistenza per farci assistere ai così grandi spettacoli dell'universo; ma sarebbe destinata a rovinare quanto ha prodotto, se esponesse al deserto cose così grandi, così splendide, così sottilmente costruite, così eleganti e belle sotto molti aspetti.

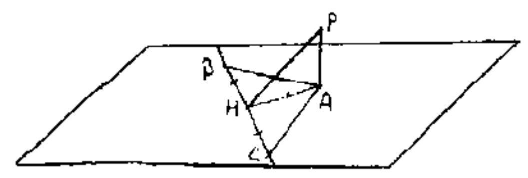
Perché tu sappia che la natura ha voluto essere contemplata, non solo semplicemente vista, osserva quale luogo ci ha assegnato. Ci ha posto nella sua parte centrale e ci ha dato la capacità di guardare a tutto intorno; e non ha solo dato all'uomo la stuatua eretta, ma, con l'intenzione di renderlo anche adatto alla contemplazione, in modo che potesse ruotare il volto insieme con l'universo, gli ha posto il capo in alto e lo ha disposto su un collo in grado di piegarsi; per cui, la natura, facendo scorrere i segni zodiacali, sei durante il giorno e sei durante la notte, ha dispiegato tutte le parti di se stessa, in modo che attraverso lo spettacolo offerto agli occhi dell'uomo, stimolasse il suo desiderio di conoscere anche il resto.

(Prof. Giovanni Sega)

Istituto Magistrale

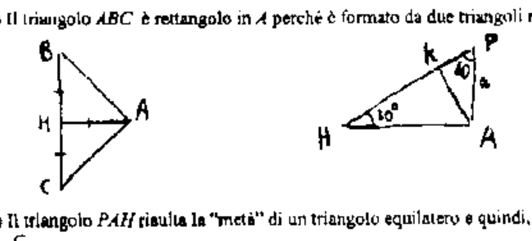
Maturità magistrale

1



a) Il piano per PAH è perpendicolare alla retta r e ogni retta di tale piano passante per H è quindi perpendicolare a r. Pertanto AH (che è una di tali rette) è perpendicolare a r.

b) Il triangolo ABC è rettangolo in A perché è formato da due triangoli rettangoli isosceli.



c) Il triangolo PAH risulta la "metà" di un triangolo equilatero e quindi, tracciando l'altezza AK, essa è $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

d) La piramide non è retta perché l'altezza condotta da A non cade nel centro della circonferenza circoscritta al triangolo isoscele PBC.

2

a) L'enunciato è vero.
Infatti, si ha:
$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Rightarrow$
(addizioniamo ad entrambi i membri il termine $4ab$, che è positivo)
$\Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab \geq 4ab \Rightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Rightarrow \frac{(a+b)^2}{4} \geq ab \Rightarrow$
(effettuando la radice quadrata di entrambi i membri)
$\Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

b) L'enunciato è vero.
Due numeri a e b sono primi tra loro se il loro massimo comune divisore $MCD(a, b) = 1$.
Sappiamo inoltre che $MCD(a, b) = MCD(b, a-b)$
Se a e b sono due numeri dispari consecutivi, li possiamo scrivere in questo modo:
$a = 2n + 1 \quad b = 2n + 3$
Si ha allora:
$MCD(2n+3, 2n+1) = MCD(2n+1, 2n+3-2n-1) = MCD(2n+1, 2) = 1$
I due numeri sono perciò primi tra loro.

c) L'enunciato è falso.
Solo la condizione sufficiente è vera. Infatti si ha:
Se a (oppure b) è divisibile per c deve essere:
$a = ch \Rightarrow ab = cbh \Rightarrow ab$ è divisibile per c
Viceversa ponendo $a=2\cdot7$ e $b=3\cdot5$, si ha che ab è divisibile per $c=2\cdot3$, ma né a né b sono divisibili per c.

Le soluzioni sono a cura di M. P. La Rosa e W. Maraschini

Tecnico Commerciale

La prova di maturità tecnica commerciale inizia richiedendo al candidato di esprimere sinteticamente come il sistema delle previsioni sia uno strumento fondamentale non solo per individuare gli obiettivi strategici di lungo-medio-breve periodo, ma per permettere ai responsabili aziendali di indirizzare, attraverso il controllo, le operazioni della gestione nella direzione prevista dalla pianificazione.

La previsione, processo con cui l'azienda fissa gli obiettivi strategici da raggiungere e individua i mezzi, gli strumenti e le azioni necessari per concretizzare gli obiettivi, viene realizzata in piani strategici resi operativi con programmi di breve periodo (budget). La programmazione è di per sé insufficiente se non è seguita da una tempestiva fase di controllo, tendente ad accertare il rispetto dei principi cardini di efficienza ed efficacia nell'uso delle risorse per conseguire le finalità aziendali.

Attraverso il budget aziendale viene operato un primo controllo preventivo o di programmazione, che verifichi la coerenza tra gli obiettivi prefissati e le azioni messe in evidenza dai piani strategici. Durante la successiva fase di esecuzione dell'attività programmata il controllo è continuativo, per verificare che gli obiettivi vengano raggiunti, e correttivo, per eliminare eventuali scostamenti riscontrati. Il controllo consuntivo finale è realizzato al termine dell'esercizio e serve ad individuare le eventuale cause e responsabilità per cui gli obiettivi raggiunti sono diversi da quelli prefissati.

La traccia prosegue richiedendo al candidato di redigere il budget economico per l'anno 1996 della società Astra, tenendo conto di alcuni vincoli del 1995 (reddito, vendite e capacità produttiva) e di una previsione di incremento delle vendite del 12% che richiede necessariamente l'acquisizione di nuovi beni strumentali per incrementare la capacità produttiva di 10.000 unità.

Il budget economico, parte del budget aziendale, è la sintesi dei diversi budget di settore: vendite, scorte di magazzino, produzione, acquisti, personale, costi generali, oneri finanziari, oneri e proventi vari.

Nel caso specifico il candidato, dovendo prevedere un incremento delle vendite rispetto all'anno precedente del 12%, deve necessariamente ricorrere a nuovi investimenti, che richiedono opportune fonti di finanziamento e comportano aumento degli oneri finanziari, se si ricorre a fonti esterne, aumento dell'acquisto di materie prime e sussidiarie, degli ammortamenti e dei costi di produzione, a fronte di un correlativo aumento dei ricavi. Il tutto deve realizzare un adeguato aumento del reddito di periodo.

La terza parte della traccia offre allo studente una scelta tra tre punti proposti, tutti collegati allo svolgimento precedente. (Nel primo viene richiesto il conto economico consuntivo della Astra spa, in cui emergano scostamenti rispetto al budget stilato precedentemente; lo studente deve commentare tali scostamenti. Ad esempio:

- l'azienda non è riuscita ad incrementare le vendite del 12% previsto in seguito ad una caduta dei consumi o per una errata politica di marketing;
- gli oneri finanziari, necessari per acquisire nuovi beni strumentali, sono stati maggiori del previsto per effetto di un aumento dei tassi di finanziamento;
- si è verificato un incremento del costo delle materie prime per effetto di una inattesa lievitazione dei prezzi.

(Il secondo punto richiede al candidato una parziale analisi finanziaria della società: partendo dall'ipotesi di un aumento di liquidità, come conseguenza delle maggiori vendite, la società ha deciso di compiere operazioni di investimento. Lo studente deve dapprima presentare le voci e gli importi dello Stato patrimoniale comparato per gli anni '95 e '96, da cui far emergere per l'anno '96 un indice di liquidità corrente (rapporto tra attivo circolante e debiti a breve termine) pari a 2,2, quindi notevolmente aumentato, e una liquidità immediata (sommatoria dei valori disponibili in cassa, in banca e sul c/c postale) pari al 50% dell'attivo circolante. Successivamente deve presentare le scritture contabili in partita doppia redatte nei primi mesi del '97, per evidenziare le opportune operazioni di investimento, quali, ad esempio: acquisizione di materie prime, materie sussidiarie, combustibili, titoli come investimento speculativo, immobilizzazioni finanziarie ed eventuali beni strumentali diversi da quelli acquistati l'anno precedente in vista di una ulteriore espansione della propria attività produttiva.

(Il terzo punto consiste nell'affrontare le problematiche relative allo smobilizzo dei crediti, attività dell'azienda tendente, attraverso la cessione dei propri crediti, a procurarsi i mezzi necessari per acquisire beni e servizi e per far fronte ai propri impegni. Lo studente, individuati due tra i contratti che permettono tale smobilizzo (sconto di effetti, portafoglio salvo buon fine, anticipo su fatture, cessione dei crediti commerciali a società parabancarie di factoring) deve affrontarne le caratteristiche tecniche, giuridiche ed economiche. Successivamente deve procedere alla rilevazione in partita doppia, sia nella contabilità della società sia in quella della banca, mettendo in evidenza, in uno dei casi, il verificarsi del mancato pagamento da parte di un cliente e di conseguenza il rientro del credito insoluto nella contabilità dell'azienda.

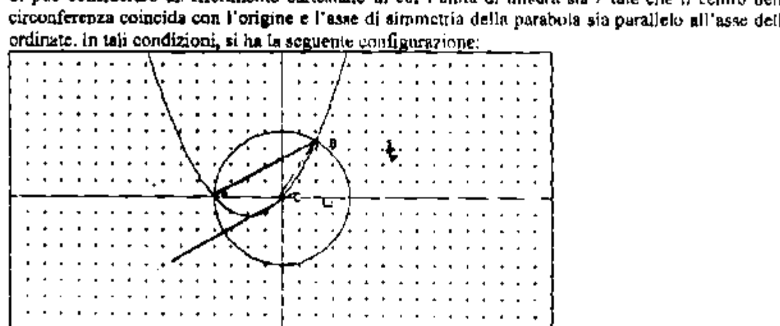
Nel complesso la prova presenta un inizio non troppo semplice tenendo presente che il budget viene a volte svolto con l'apporto di software didattico, senza che lo studente sia molto sollecitato allo sviluppo personale di calcoli numerici.

(Prof. Lucia Barale)

Liceo Scientifico

Maturità scientifica
Tema 1

Si può considerare un riferimento cartesiano in cui l'unità di misura sia r tale che il centro della circonferenza coincida con l'origine e l'asse di simmetria della parabola sia parallelo all'asse delle ordinate. In tali condizioni, si ha la seguente configurazione:



a) Passando per l'origine la parabola ha equazione $y=ax^2+bx$. Per determinare i coefficienti a e b, si tenga conto che la parabola passa per i punti $A(-1;0)$ e $B(1/2;\sqrt{3}/2)$ (in quanto AB deve essere lato del triangolo equilatero inscritto alla circonferenza)
Si deve quindi avere:
$0=a-b \Rightarrow a = b$
$\sqrt{3}/2 = a/4 + a/2 \Rightarrow a = 2\sqrt{3}/3$
L'equazione della parabola è perciò:
$$y = \frac{2\sqrt{3}}{3}(x^2 + x)$$

b) Il solido si può ottenere sottraendo al cono di asse AH il solido di rotazione generato dalla regione sottesa all'arco di parabola CB.
Il volume del cono è:
$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \frac{3}{2} = \frac{3}{8}\pi$$
Il volume di un solido di rotazione generato dalla superficie sottesa ad una curva grafico di una funzione f in un intervallo $[a, b]$ è:
$$\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$$
Nel nostro caso, il volume generato da CHB è:
$$V = \frac{4}{3}\pi\int_0^{1/2}\left(x^2 + x\right)^2 dx = \frac{19}{180}\pi;$$
Sottraendo si ottiene:
$$\frac{3}{8}\pi - \frac{19}{180}\pi = \frac{97}{360}\pi$$

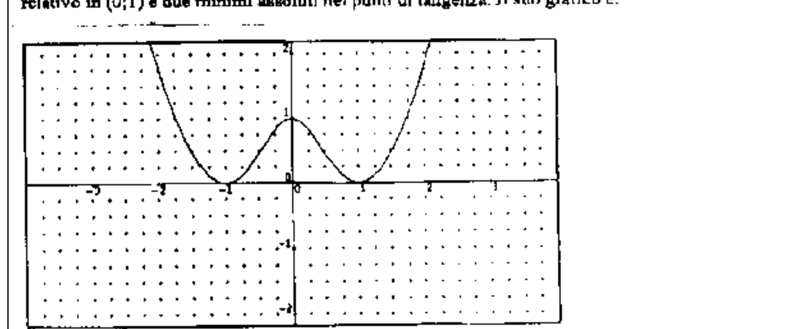
c) La retta t richiesta ha coefficiente angolare $\sqrt{3}/3$ e impostando il sistema,
$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + q \\ y = 2\frac{\sqrt{3}}{3}(x^2 + x) \end{cases}$$
si ottiene che il discriminante dell'equazione risolvente è nullo per $q = -\sqrt{3}/24$.
La retta t ha perciò equazione:
$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{24}$$
Per calcolare la distanza richiesta si applica la formula della distanza punto-retta, considerando il punto $A(-1;0)$:
$$d(A,t) = \frac{\left|0 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{24}\right)\right|}{\sqrt{1+3}} = \frac{7}{48}\sqrt{3}$$

d) Spezziamo la superficie di cui dobbiamo calcolare l'area in tre parti.
Il settore circolare ACB poiché l'angolo in C è di 120° ha area uguale ad un terzo di quella della circonferenza. Ha perciò area $\pi/3$.
La regione compresa tra il segmento AC e l'arco di parabola AC ha area:
$$\left|2\frac{\sqrt{3}}{3}\int_{-1}^{0}(x^2 + x)dx\right| = \left|2\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\right| = \frac{\sqrt{3}}{9}$$
Infine la regione compresa tra il segmento BC e l'arco di parabola BC si ricava sottraendo all'area del triangolo BHC ($\sqrt{3}/8$) l'area compresa tra l'arco di parabola BC e l'asse delle ascisse:
$$2\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{1/2}(x^2 + x)dx = 2\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{6} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$
Si ha quindi, complessivamente, l'area di una delle due parti del cerchio:
$$\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{9} + \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$
L'altra area si ottiene sottraendo questo valore a π.

Tema 2

a) La funzione, sempre definita, è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate. Poiché il suo grafico deve essere tangente all'asse delle ascisse, deve essere $x^4+ax^2+b=0$ in due punti doppi.
Poiché
$$x^2 = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$
deve essere $a^2=4b$.
Poiché il grafico della funzione deve essere tangente alla retta $y=1$, per motivi di simmetria tale punto è necessariamente sull'asse delle ordinate, ed è quindi $(0;1)$. Si deduce che $b=1$ e, quindi, $a=\pm2$.
Poiché il valore +2 non è accettabile (perché rende negativo x^2), deve essere -2. La funzione è perciò:
$$y = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 + 1} = \frac{(x^2 - 1)^2}{x^2 + 1}$$

b) Questa funzione è sempre non negativa, il suo grafico è tange l'asse x in $(\pm1;0)$, ha massimo relativo in $(0;1)$ e due minimi assoluti nei punti di tangenza. Il suo grafico è:

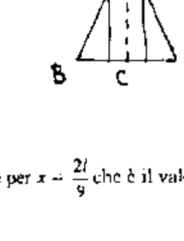


c) L'area è:
$$2\int_0^1 f(x)dx = 2\int_0^1\left(\frac{4}{x^2+1} + x^2 - 3\right)dx = 2\left[4\arctan x + \frac{x^3}{3} - 3x\right]_0^1 = 2\left(\pi - \frac{8}{3}\right)$$

d) La trasformazione $x \rightarrow x/3$ è una trasformazione che "triplica" le ascisse e lascia invariate le ordinate. L'area tra 0 e 1 perciò si triplica e risulta $(3\pi-8)$.

Tema 3

Indicati con h e r altezza e raggio del cono, deve essere $2h+2r=l$ (essendo l la lunghezza assegnata)
Si ha che $h=(l-2r)/2$.
Il volume del cono è perciò:
$$V = \frac{1}{6}\pi\left(lr^2 - 2r^3\right)$$
La derivata prima di questa funzione di r è:
$$V' = \frac{\pi}{3}\left(lr - 3r^2\right)$$
La derivata si annulla per $r=0$ (che escludiamo) e per $r=l/3$, che è il valore per cui il volume risulta massimo.
L'area della superficie laterale è:
$$A = \frac{\pi r}{2}\sqrt{8r^2 - 4lr + l^2}$$
La sua derivata prima è:
$$A' = \frac{\pi\left(16r^2 - 6lr + l^2\right)}{2\sqrt{8r^2 - 4lr + l^2}}$$
Questa derivata è sempre positiva (perché il discriminante del numeratore è sempre negativo) e quindi l'area laterale è sempre crescente. Non può perciò essere massima in corrispondenza del volume massimo.
Indichiamo con x il raggio del cilindro inscritto nel cono e con k la sua altezza. Per l'omotetia dei triangoli AFD e ABC si ha:
$$k = \frac{l - 3x}{6}$$
Il volume del cilindro è perciò:
$$V_{Cil} = \frac{1}{6}\pi x^2(l - 3x)$$
La derivata prima di questa funzione è:



$$V'_{Cil} = \frac{\pi}{6}(2lx - 9x^2)$$
Questa funzione si annulla per $x=0$ (che escludiamo) e per $x = \frac{2l}{9}$ che è il valore per cui il volume risulta massimo.

Per quanto riguarda l'ultima parte del quesito, la dimostrazione del teorema si trova in qualsiasi libro di analisi.